数理解析研究所講究録
937巻 1996年 1-6

Fourier超函数, 指数型函数, 及びAvanissian-Gay変換について

東大数理 程遠 (Cheng Yuan)

Q : Fourier超函数, $Q_{[a,b]}(Q)$ は $\mathrm{supp}(Q) \subset [a,b]$ のFourier超函数. $\mathrm{Exp}(\mathbb{C},[a,b])$ は指数型函数, 即わち.

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C},[a,b]) = \{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) ;\ \forall \varepsilon > 0\ \exists C \geqq 0$$
$$|F(z)| \leqq C \exp(H_{[a,b]}(\mathrm{Im}\, z) + \varepsilon |z|) \}$$

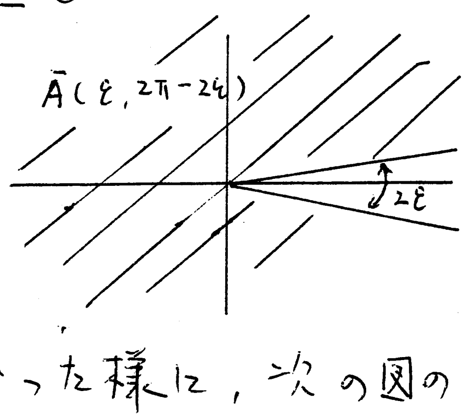
$\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$ は次の様な函数空間である.

$\varphi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$, 次の(i)(ii)を満たす:

(i) $\displaystyle\lim_{|z| \to \infty} |\varphi(z)| = 0$

(ii) $\sup\{ |\varphi(z) z^{\varepsilon'}| ;\ z \in \bar{A}(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \} < +\infty$

但し $0 < 2\varepsilon < 2\pi$ $0 < \varepsilon' < 1$



すでにわかった様に, 次の図の中で, I, II, III は いずれも線型位相同型写像である.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_{[a,b]}(\Omega) \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathrm{I}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathrm{III}"] & \\ Exp(\mathbb{C},[a,b]) \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathrm{II}"'] & & \mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus[e^{-b},e^{-a}]) \end{tikzcd}$$

<図1>

Avanissian-Gay変換とMellin変換の定義はAppendixを参照．

IはPaley-Wiener-Ehrenpreisの定理であり，IIIはAvanissian-Gay変換であり，IIはMellin変換である。だから，この三つの空間は実は一つの空間の三つのちがう表現に他ならない．一つの空間のある性質は他の二つ空間に対応して表現できるはずである。例えば，$\forall u \in \Gamma_{[a,b]}(\Omega)$ に対して，$Supp(u)$ の凸包の存在は勿論のことである．だから，Exp空間のことばでいえば，次の様に言いえるだろう．

$\forall f \in Exp(\mathbb{C},[a,b])$

・唯一の区間 J_f が存在して，

$f \in Exp(\mathbb{C}, J_f)$ が J_f よりもっと小さい区間に対して成立しない．

・$f \in \{$劣指数函数$\} \Longleftrightarrow J_f = \{0\}$

統一の空間として見ると，ある元があれば，Γ，Exp，$\mathcal{O}_0$ 中での表現はそれぞれ u，$\hat{u}$，G_u として記すと，u の台は $\mathcal{O}$ とExp空間でどの様に表わされか？

この論文の主定理として，下の関係式を証明した

$$e^{-Supp(u)} = \{\, G_u(\zeta) \text{ の特異点} \,\}$$

一方 $Gu(\zeta)$ は次の様な Taylor 展開式と Laurent 展開式を持つ.

$$Gu(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n}\, \hat{u}(in) \qquad \left(|\zeta| < e^{-b} \right)$$

$$Gu(\zeta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{-n}\, \hat{u}(-in) \qquad \left(|\zeta| > e^{-a} \right)$$

三つの空間を関連させて見ればもっと面白い. 例ば, $\forall\, \hat{u} \in Exp(\mathbb{C}, [a,b])$ に対して, いつ $\hat{u} \in \{$多指数函数$\}$ であろうか? 空間がちがうので表現もちがう:

Exp で $\quad J\hat{u} = \{0\}$;

$\mathcal{A}'$ で $\quad supp(u) = \{0\}$

$\mathcal{O}_0$ で $\quad \{Gu(\zeta)$ の特異点$\} = \{e^{-0}\} = \{1\}$

$Gu(\zeta)$ の Laurent と Taylor 展開式からすぐ次のことがわかる.

$\forall\, \hat{u} \in Exp(\mathbb{C}, [a,b])$ に対して

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\hat{u}(in)|} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\hat{u}(-in)|} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$\hat{u} \in \{$多指数函数$\}$

この結論は吉野先生がもっと弱い条件で得た.

図1 の関係式は non-compact 台に拡張される. 拡張し

てから，次の同値関係を得た．

(i) $u(x) \in \Gamma_{\{+\infty\}}(Q)$

(ii) $\hat{u}(x) \in Exp(\mathbb{C}_{-}, +\infty)$

(iii) $G_u(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で解析的である．

(iv) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\hat{u}(-in)|} = 0$

この関係より，$\Gamma_{\{+\infty\}}(Q)$ に対して，分類することができる．それ分類によって，$\{+\infty\}$ で δ 函数様な函数が存在しないことが証明できる．即ち

δ 函数は次の性質を持つ：

$$\{J(D)\delta \,;\, J(D) \text{は局所作用素である}\} = \Gamma_{\{0\}}(Q)$$

この性質は $\{+\infty\}$ で成立しない．

$\forall \alpha(x) \in \Gamma_{\{+\infty\}}(Q)$ を固定すると．

$$\{J(D)\alpha(x)\} \subsetneqq \Gamma_{\{+\infty\}}(Q)$$

Appendix :

・ $u \in \Gamma_{[a,b]}(Q)$ に対し

$$G_u(\zeta) = \langle u(z), (1-\zeta e^{z})^{-1} \rangle$$

は $\zeta \notin [e^{-b}, e^{-a}]$ で意味を持つ.

これを u の Avanissian-Gay 変換という.

$$G_u(\zeta) \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$$

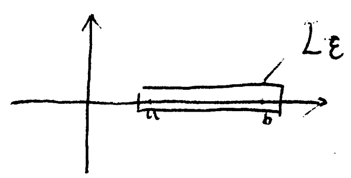
・ $\phi \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus [e^{-b}, e^{-a}])$ とする.

$$M(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \exp(-L_\varepsilon)} \phi(w)\, w^{-z-1}\, dw$$

(ε は十分小さい)

は ϕ の Mellin 変換という.

$$M(\phi)(z) \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}, [a,b])$$



References

[1] 金子晃：超函数入門 上・下 UP応用数学選書 1,6
東大出版会 , 1980 , 1982

[2] 小松彦三郎：超函数入門 . 岩波講座基礎数学
1978

[3] 森本光生 ： Analytic Functionals with Non-compact Carrier . Tokyo J. MATH. Vol. 1, No 1, 1978

[4] M. Morimoto and K. Yoshino : A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type

[5] K. Yoshino Lerch's Theorem for Analytic Functionals with Non-compact Carrier and its Applications to Entire Functions Complex Variables,
1984, Vol. 2 , pp 303 - 310

[6] 片岡清臣：超函数のラドン変換とその応用について . 東大修士論文 1976

[7] 河合隆裕：超函数論におけるFourier変換の理論とその応用 .
東大修士論文 ; 1979